Математичка гимназија у Београду
Додатна настава, шк.г. 2003/04

Полиноми

Т. *(Безуов став)* Полином $P(x)$ је дељив биномом $x-a$ ако и само ако је $P(a)=0$.

Т. Полином n-тог степена има највише n нула у скупу комлексних бројева; шта више, има их тачно n ако се броје са својим вишеструкостима. Тако сваки полином $P(x)$ има јединствену факторизацију

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n),\qquad \text{где су } \alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}, \text{ не обавезно различити.}$$

Т. Ако $(x-\alpha)^k \mid P(x)$, онда $(x-\alpha)^{k-1} \mid P'(x)$.

Т. *(Ролова теорема)* Између сваке две реалне нуле реалног полинома $P(x)$ налази се бар једна нула полинома $P'(x)$. (*Последица:* ако $P(x)$ има све реалне нуле, онда и $P'(x)$ има све реалне нуле.)

Деф. Полином $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ је *симетричан* ако за сваку пермутацију π скупа $\{1,2,\dots,n\}$ важи $P(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv P(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},\dots,x_{\pi(n)})$.

Елементарни симетрични полиноми по $x_1,\dots,x_n$ су полиноми $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n$, где је

$$\sigma_k(x_1,x_2,\dots,x_k)=\sum x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_k},$$

при чему се сумира по свим k-точланим подскуповима $\{i_1,\dots,i_k\}$ од $\{1,2,\dots,n\}$.

Т. *(Вијетове формуле)* Ако су $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ нуле полинома $P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n$, тада је $a_k=(-1)^k\sigma_k(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ за $k=1,2,\dots,n$.

Т. *(Њутнова теорема о симетричним полиномима)* Ако означимо $s_k=x_1^k+x_2^k+\dots+x_n^k$, важи

$$k\sigma_k=s_1\sigma_{k-1}-s_2\sigma_{k-2}+\dots+(-1)^k s_{k-1}\sigma_1+(-1)^{k+1}s_k.$$

Т. Сваки симетричан полином по $x_1,\dots,x_n$ се може изразити као полином по $\sigma_1,\dots,\sigma_n$.

1. Доказати да полином $x^n+2nx^{n-1}+2n^2x^{n-2}+\dots$ не може да има све реалне нуле.

2. Одредити све полиноме облика $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, где је $a_j\in\{-1,1\}$ $(j=0,1,\dots,n)$, који имају само реалне нуле.

3. За које n је полином x^n+x+1 дељив са а) x^2-x+1, б) x^3+x+1?

4. Доказати да полином $x^6-2x^5+x^4-2x^3+x^2-2x+1$ има четири нуле модула 1.

5. Ако је вредност $P(x)$ целобројна за сваки цео број x, показати да постоје коефицијенти $a_0,\dots,a_n$ такви да је

$$P(x)=a_n\binom{x}{n}+a_{n-1}\binom{x}{n-1}+\dots+a_0\binom{x}{0}.$$

6. Претпоставимо да је, за дати природан број m и полином $R(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$, $R(x)$ цео број дељив са m кад год је x цео број. Доказати да је тада $n!a_n$ дељиво са m.

7. Ако полином P са реалним коефицијентима задовољава за свако x
$$P(\cos x) = P(\sin x),$$
доказати да постоји полином Q такав да је за свако x, $P(x) = Q(x^4 - x^2)$.

8. Одредити полином $x^2 + ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ чији максимум по апсолутној вредности на интервалу $[0, 1]$ има најмању могућу вредност.

9. Доказати да максимум апсолутне вредонсти ма ког реалног моничног полинома n-тог степена на $[-1, 1]$ није мањи од $\frac{1}{2^{k-1}}$.

10. Нека су дати комплексни полиноми $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ са нулама $x_1, \ldots, x_n$, и $Q(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$ са нулама $x_1^2, \ldots, x_n^2$. Ако су $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots$ и $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ реални бројеви, доказати да је и $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ реалан.

11. Ако је полином P n-тог степена такав да је за свако $i = 0, 1, \ldots, n$ $P(i)$ једнако остатку i при дељењу са 2, израчунати $P(n + 1)$.

12. За полином $P(x)$ n-тог степена важи $P(i) = \frac{1}{i}$ за $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Наћи $P(n + 2)$.

13. (а) Ако за реалан полином $P(x)$ важи $P(x) \geq 0$, доказати да постоје реални полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви да је $P(x) = A(x)^2 + B(x)^2$.
    (б) Ако за реалан полином $P(x)$ важи $P(x) \geq 0$ за свако $x \geq 0$, доказати да постоје реални полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви да је $P(x) = A(x)^2 + xB(x)^2$.

14. Ако једначина $ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$ има реалне корене веће од 1, где $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, доказати да једначина $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ има бар један реалан корен.

15. За које реалне вредности a постоји рационална функција $f(x)$ која задовољава $f(x^2) = f(x)^2 - a$?

16. Одредити полиноме P за које је $16P(x^2) = P(2x)^2$.

17. Наћи све полиноме P за које је $P(x)^2 - 2 = 2P(2x^2 - 1)$.

18. Ако полиноми P и Q имају бар по један реалан корен, и
$$P(1 + x + Q(x)^2) = Q(1 + x + P(x)^2),$$
доказати да је $P \equiv Q$.

19. Ако су P и Q монични полиноми такви да је $P(P(x)) = Q(Q(x))$, доказати да је $P \equiv Q$.

20. За дате полиноме $P(x)$ и $Q(x)$ и произвољно $k \in \mathbb{C}$, означимо $P_k = \{z \in \mathbb{C} \mid P(z) = k\}$ и $Q_k = \{z \in \mathbb{C} \mid Q(z) = k\}$. Ако је $P_0 = Q_0$ и $P_1 = Q_1$, доказати да мора бити $P(x) = Q(x)$.

21. Доказати $s_m = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-1}\sigma_n s_{m-n}$, за све $m \geq n$. (Сви полиноми су по n промењљивих.)

22. Нека комплексни бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_k$ задовољавају
$$x_1^j + x_2^j + \cdots + x_k^j = n, \qquad \text{за } j = 1, 2, \ldots, k,$$
где су n, k дати природни бројеви. Доказати да је
$$(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k) = x^k - \binom{n}{1}x^{k-1} + \binom{n}{2}x^{k-2} - \cdots + (-1)^k\binom{n}{k}.$$

23. Претпоставимо да моничан полином $P(x)$ са целобројним коефицијентима има све нуле по модулу једнаке 1. Доказати прво да таквих полинома има само коначно много, а онда извести да су све његове нуле корени јединице, тј. да $P(x) \mid (x^n - 1)^k$ за неке природне n, k.

Душан Ђукић